Test 6 – Sujet B

Résoudre les deux exercices suivants.

Exercice 1

(i) Calculer la primitive suivante :

$$\int (5x+3)e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

(ii) Calculer l'intégrale suivante à l'aide du changement de variable $x = \ln t$:

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{t\sqrt{1-(\ln t)^2}}\mathrm{d}t$$

Exercice 2

(i) Résoudre l'équation différentielle suivante et trouver l'unique solution qui vérifie la condition initiale donnée :

$$\begin{cases} y'(t) = t(t^2-3)^2 y(t) \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

(ii) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(1+t)x'(t) + x(t) = 3t^2$$

Test 6 – Sujet B

NOM et PRÉNOM (lisibles) :

Résolution des exercices

Test 6 – Sujet B

Corrigé du test

Exercice 3

(i) Par intégration par parties :

$$\int (5x+3)e^{-x}\ \mathrm{d}x = -(5x+3)e^{-x} + \int 5e^{-x}\ \mathrm{d}x = -(5x+8)e^{-x} + \text{cste}$$

(ii) Si on pose $x = \ln t$, on a $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\mathrm{d}t$, $x = 0$ quand $t = 1$, et $x = 1/2$ quand $t = \sqrt{e}$. Donc :

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{t\sqrt{1-(\ln t)^2}}\mathrm{d}t = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = [\arcsin x]_0^{1/2} = \frac{\pi}{6}$$

Exercice 4

(i) Les solutions de l'équation différentielle proposée sont :

$$y : t \mapsto \lambda e^{\frac{1}{6}(t^2-3)^3},$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. De plus,

$$y(2) = 1 \iff \lambda e^{1/6} = 1 \iff \lambda = e^{-1/6}.$$

L'unique solution est donc $y : t \mapsto e^{\frac{1}{6}(t^2-3)^3 - \frac{1}{6}}$.

(ii) L'équation homogène associée est $x'(t) + \frac{1}{1+t}x(t) = 0$. Elle a pour solutions

$$x_0 : t \mapsto \lambda e^{-\ln(1+t)} = \frac{\lambda}{1+t},$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. La méthode de variation de la constante nous donne une solution particulière de l'équation totale : $x_p : t \mapsto \frac{\lambda(t)}{1+t}$, avec

$$\lambda(t) = \int 3t^2\ \mathrm{d}t = t^3.$$

Ainsi, les solutions de cette équation différentielle sont :

$$x : t \mapsto \frac{t^3+\lambda}{1+t},$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.